8Д

УДК 004.3

И.А. Дичка, В.В. Жабина
Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», г. Киев, Украина
dychka@scs.ntu-kpi.kiev.ua; val_zhabina@mail.ru

Совмещение зависимых операций на уровне обработки разрядов операндов

На примере операции умножения рассматривается возможность выполнения последовательности зависимых по данным операций в режиме совмещения на уровне обработки разрядов машинных слов. Исследован метод умножения чисел в неавтономном режиме с использованием смещенной избыточной системы счисления, определено влияние на время вычислений величины основания системы счисления и длины последовательности зависимых операций.

Введение

Уменьшение времени реализации функциональных зависимостей может быть достигнуто за счет распараллеливания вычислений с использованием нескольких операционных устройств (ОУ). Традиционные методы параллельной арифметики позволяют выполнять указанное распараллеливание только на уровне обработки машинных слов, когда перед выполнением каждой операции операнды в ОУ представлены всеми разрядами. Однако в ряде случаев, например, при реализации итерационных процессов, вычислении многоместных выражений путем суперпозиции функций с меньшим числом аргументов возникает необходимость выполнения последовательностей операций зависимых по данным. Распараллеливание вычислений на уровне обработки машинных слов в данном случае не представляется возможным. Повышение быстродействия вычислительных систем при выполнении цепочек зависимых операций может быть достигнуто за счет применения методов машинной арифметики, позволяющих выполнять зависимые по данным операции в режиме частичного совмещения с использованием избыточных систем счисления [1]. Способы построения таких вычислительных систем известны [2]. В их состав входят квазипараллельные ОУ, позволяющие совмещать выполнение зависимых операций на уровне обработки разрядов слов следующим образом.

На каждом шаге в ОУ вводится по одному разряду операндов (в простейшем случае) и формируется один разряд результата. При этом разряд промежуточного результата, полученный на i-м шаге в одном ОУ при выполнении j-й операции, может быть использован на (i+1)-м шаге в другом ОУ при выполнении (j+1)-й операции. При таком режиме вычислений выполнение последующей операции будет начинаться не после завершения выполнения предыдущей операции, а сразу же после получения первого разряда результата этой операции. Режим работы таких ОУ называют неавтономным, так как для выполнения последовательности операций необходимо несколько ОУ, которые синхронно обмениваются информацией в процессе работы.

Методы неавтономной арифметики достаточно хорошо изучены в симметричных избыточных системах счисления, которые позволяют реализовать любые функции, как с положительными, так и с отрицательными частными производными [1], [2]. В общем случае построение квазипараллельных ОУ требует больших аппаратурных затрат по сравнению с параллельными ОУ, в которых не применяются методы ускорения операций второго порядка. Однако на практике широко применяются вычислительные методы,

основанные на реализации функций с положительными частными производными. Это имеет место, например, при реализации методов численного интегрирования, цифровой обработки сигналов, вычислении полиномов. В случае положительных аргументов вычисления могут производиться в смещенных системах счисления, что позволяет упростить квазипараллельные ОУ.

Ниже рассматривается операция умножения в смещенных системах счисления с различными основаниями, исследуется влияние величины основания системы счисления на сложность ОУ и время выполнения последовательностей операций, зависимых по данным.

Обоснование метода умножения

Функция $Z^* = XY$, где аргументы X и Y являются положительными числами, имеет только положительные частные производные. Следовательно, положительные приращения аргументов вызывают только положительное приращение функции. Благодаря этому умножение положительных чисел при поразрядном вводе операндов можно реализовать в смещенной системе счисления.

Пусть множимое X и множитель Y являются положительными правильными дробями, представленными n-разрядным кодом в позиционной системе счисления с основанием k, то есть

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i k^{-i}\ ,\ Y = \sum_{i=1}^{n} y_i k^{-i}\ , \tag{1}$$

где $x_i, y_i \in \{\overline{0,q}\}$ – цифры операндов.

Для упрощения индексации при написании формул будем рассматривать метод получения произведения $Z = k^{-p}XY$, зная при этом, что код произведения $Z^* = XY$ может быть получен из кода произведения Z смещением запятой на p разрядов вправо. Иными словами, цифры произведения Z^* формируются с запаздыванием на k шагов. Естественно, что для получения n разрядов после запятой произведения Z^* необходимо сформировать $m = n + p$ разрядов произведения Z.

Код Z, представленный m разрядами, имеет вид

$$Z = \sum_{i=1}^{m} z_i k^{-i}\ ,$$

где $z_i \in \{\overline{0,q}\}$ – цифры произведения Z.

Будем считать, что операнды вводятся со старших разрядов. Коды X, Y и Z, содержащие только i разрядов справа от запятой, обозначим соответственно через X_i, Y_i и Z_i.

После выполнения m шагов умножения можно получить код $Z_m = Z$ с погрешностью, не превышающей k^{-m}, если на каждом i-м шаге цифру z_i выбирать таким образом, чтобы выполнялось условие

$$Z_i \le k^{-p} X_i Y_i < Z_i + k^{-i}, \tag{2}$$

поскольку при $i = m$ имеет место $X_m = X$ и $Y_m = Y$.

Введя обозначение

$$R_i = (k^{-p} X_i Y_i - Z_i) k^i, \tag{3}$$

условие (2) можно записать так:

$$0 \le R_i < 1. \tag{4}$$

Предположим, что условие (4) выполняется на $(i-1)$ -м шаге, и определим, при каком минимальном значении p это условие будет выполняться на любом последующем шаге. Выражение (3) с учетом формул (2) и (1) можно привести к виду

$$R_i = kR_{i-1} + k^{-p} X_{i-1} y_i + k^{-p} Y_i x_i - z_i$$

или, введя обозначение

$$H_i = kR_{i-1} + k^{-p} X_{i-1} y_i + k^{-p} Y_i x_i , \quad (5)$$

представить в форме

$$R_i = H_i - z_i . \quad (6)$$

С учетом (6) выражение (4) можно записать в виде

$$z_i \le H_i < 1 + z_i . \quad (7)$$

Так как $z_{i\min} = 0$ и $z_{i\max} = q$, то условие (7) будет выполняться в том случае, если значения H_i не будут выходить за пределы интервала $[0, q+1)$. Если H_i принадлежит интервалу $[0, q+1)$, то всегда можно подобрать значение $z_i \in \{\overline{0, q}\}$, при котором условие (7) будет выполняться, что вполне очевидно. Поскольку все члены, входящие в правую часть (5), могут принимать либо нулевое, либо некоторое положительное значение, то H_i не может быть отрицательным числом. Следовательно, p надо определять из условия $H_{i\max} < q+1,$ которое с учетом (4) и (5), а также того факта, что операнды по величине меньше единицы, принимает вид $k + 2qk^{-p} < q+1$. Поскольку p должно быть целым числом, то минимальное его значение определяется так:

$$p = \left] \log_k \frac{2q}{q - r + 1} \right[. \quad (8)$$

Так как перед началом умножения, когда $X_0 = Y_0 = R_0 = Z_0 = 0$, условие (4) выполняется, то оно будет выполняться на любом шаге, если p выбрано из условия (8).

Подставляя в (7) все возможные значения $z_i \in \{\overline{0, q}\}$, получим правило выбора цифры произведения на i -м шаге:

$$z_i = \operatorname{ent} H_i , \;\; R_i = \operatorname{rest} H_i . \quad (9)$$

Таким образом, один шаг умножения сводится к следующему. По формуле (5) находится значение H_i, в соответствии с (9) формируется цифра произведения и значение R_i. Начальными являются значения $i = 1,\ X_0 = Y_0 = R_0 = Z_0 = 0$. Все указанные процессы можно совмещать во времени, то есть ОУ может быть однотактным.

Код цифры результата z_i является целой частью кода H_i, то есть разрядами, расположенными слева от запятой. Для формирования z_i в данном случае не требуется дополнительных аппаратурных затрат, что имеет место при использовании симметричных систем счисления [1]. Это создает предпосылки для упрощения квазипараллельных ОУ.

Определим, при каких основаниях может быть реализован рассмотренный метод умножения в смещенных системах счисления. Из (8) видно, что q должно удовлетворять условию $q - k + 1 > 0$, откуда $q > k - 1$. Так как q – целое число, то минимальное его значение должно быть не меньше основания k системы счисления. Естественно, что все системы, отвечающие указанному выше требованию, являются избыточными.

Таким образом, рассмотренный выше метод умножения может быть реализован в любой избыточной смещенной системе счисления с цифрами $\{\overline{0, q}\}$, где q удовлетворяет условию $q \ge k$. Естественно, при любом основании k существует множество таких систем счисления. Минимальной избыточностью среди них обладают системы с цифрами $\{\overline{0, k}\}$.

Эти системы счисления содержат только на одну цифру больше, чем канонические системы. Например, при $k = 2$ и $k = 10$ системы счисления, обладающие минимальной избыточностью, содержат соответственно цифры $\{0,1,2\}$ и $\{\overline{0,10}\}$.

Выбор системы счисления при заданном основании оказывает влияние как на запаздывание при формировании разрядов произведения, выраженное в числе шагов, так и на число информационных входов и выходов операционных устройств. Естественно, что с увеличением числа возможных цифр в общем случае увеличивается и число линий, необходимых для передачи цифр от одного операционного устройства к другому. При использовании для представления цифр избыточной системы пространственно-унитарного кода эта зависимость прямо пропорциональная, а при использовании двоичного позиционного кода – логарифмическая. Ясно, что с точки зрения уменьшения числа шин для передачи информации следует отдать предпочтение системам счисления с меньшей избыточностью, то есть с меньшим числом различных цифр. Однако в общем случае с уменьшением q возрастает p, что вытекает из (8), а следовательно, увеличивается запаздывание при формировании разрядов произведения Z^*. Подставляя в (8) $q = k$, определим, что для систем счисления с минимальной избыточностью $p = 1 + \left]\log_k 2\right[$. Так как рассматриваются системы с натуральным основанием $k \geq 2$, то в данном случае $p = 2$ независимо от основания системы счисления. С ростом q (считаем, что $k = const$) аргумент логарифмической функции в (8) приближается сверху к 2. Следовательно, существуют системы счисления с основанием $k > 2$, для которых $p = 1$. Очевидно, что такие системы должны удовлетворять условию $2q/(q - k + 1) \leq k$ или

$$q \geq \frac{k^2 - k}{k - 2}. \qquad (10)$$

Например, при $k = 10$ система счисления с минимальной избыточностью, удовлетворяющая условию (10), содержит цифры $\{\overline{0,12}\}$. В общем случае системы счисления с минимальной избыточностью, для которых $p = 1$, определяются из условия

$$q = \left]\frac{k^2 - k}{k - 2}\right[.$$

Очевидно, что применять системы счисления с большей избыточностью нецелесообразно, так как к уменьшению запаздывания при формировании цифр произведения это не приводит, а число информационных входов и выходов операционных устройств в общем случае возрастает. В связи с этим число систем счисления, представляющих практический интерес, значительно уменьшается.

Оценка времени вычислений

Определим зависимость цикла получения цифры результата от величины основания системы счисления. Для однотактного ОУ длительность цикла определяется временем формирования значения промежуточной переменной H_i и записи информации в регистр. С учетом (1) и (5) получим основную формулу, вычисление которой определяет длительность цикла в однотактном ОУ, в виде

$$H_i = kR_{i-1} + k^{-p}X_{i-1}y_i + k^{-p}Y_{i-1}x_i + k^{-p-i}y_i x_i. \qquad (11)$$

Будем считать, что операция выполняется в двоично-кодированной системе счисления. В этом случае для построения ОУ можно использовать обычную двоичную аппаратуру, в том числе двоичные сумматоры. Наибольший интерес представляют системы с основанием 2^j ($j = 1,2,3,...$), поскольку они наиболее просто реализуются на двоичной аппаратуре.

Каждое слагаемое в (11), кроме первого, может быть сформировано с помощью сдвигателей, число которых равно числу двоичных разрядов в цифрах x_i, y_i. Поскольку максимальное значение цифр x_i, y_i не превышает q, то число двоичных разрядов для их представления равно $]\log_2 q[$. Тогда общее число слагаемых при вычислении формулы (11) составляет

$$N = 1 + 3]\log_2 q[\,.$$

Для одновременного сложения нескольких чисел можно использовать дерево сумматоров без распространения переносов по строкам внутри дерева [3]. Перенос распространяется только на последнем ярусе, на котором суммируются два слагаемых. Количество ярусов без распространения переносов в дереве, узлы которого имеют 3 входа и 2 выхода, составляет $\left]\log_{\frac{3}{2}} N\right[$. Время распространения переносов на последнем ярусе с учетом возможности ускорения распространения переносов можно с приемлемой для рассматриваемого случая точностью принять за $]\log_2 n[\tau_{CM}$, где τ_{CM} – задержка сигналов одноразрядным сумматором [3]. Время записи кода в регистр будем считать равным $3\tau_{CM}$. Тогда длительность цикла составляет

$$T_Ц = (\left]\log_{\frac{3}{2}} N\right[+]\log_2 n[+ 3)\tau_{CM}\,.$$

Для сравнения эффективности ОУ при выполнении последовательности нераспараллеливаемых операций воспользуемся характеристикой, предложенной в [4]. Позицию операции в цепочке операций с задержкой p_i формирования старшего разряда результата будем называть глубиной операции. Время выполнения операции с глубиной L определяется формулой

$$T = \left[n - 1 + \sum_{j=1}^{L} \left(p_j + 1\right) T_ц \right]. \qquad (12)$$

Выразив p_i через k в соответствии с (10), можно определить зависимость времени вычисления последовательности операций по формуле (12) от величины основания системы счисления и длины последовательности операций (рис. 1).

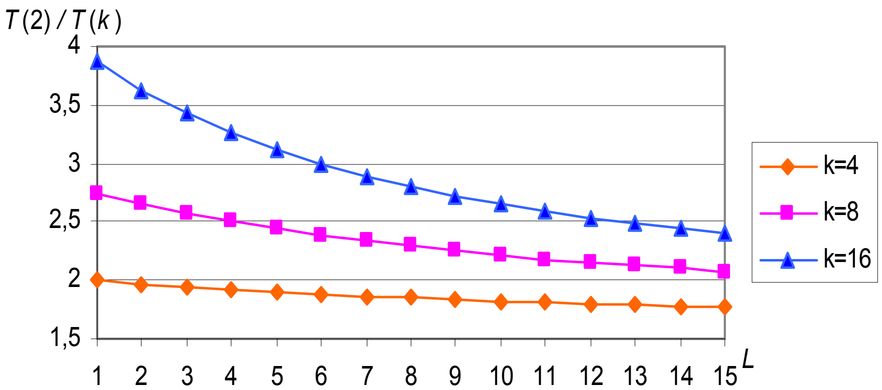


Рисунок 1 – Зависимость отношения $T(2)/T(k)$ от длины цепочки операций L при разрядности операндов в двоичном представлении $n = 64$: $T(2)$ – длительность вычислений для двоичной системы счисления;
$T(k)$ – длительность вычислений для системы счисления с основанием $k > 2$

Заключение

Благодаря поразрядной передаче данных между квазипараллельными устройствами уменьшается число связей между компонентами системы по сравнению с использованием параллельных устройств. Это особенно важно при реализации систем в интегральном исполнении (например, на ПЛИС), поскольку уменьшение числа соединений повышает надежность систем и более экономично использует ресурсы интегральных схем.

Число линий связей между устройствами для передачи разрядов операндов с увеличением основания системы счисления возрастает по логарифмической зависимости, то есть незначительно по сравнению с длиной параллельных кодов (32 – 64 разрядов), с которыми оперируют параллельные устройства.

Применение избыточных смещенных систем счисления с основанием $k > 2$ позволяет уменьшить время выполнения последовательности зависимых по данным операций по сравнению с двоичной системой счисления при любой длине последовательности, причем выигрыш во времени увеличивается с уменьшением числа операций. Это расширяет область эффективного использования квазипараллельных устройств.

Литература

1. Жабин В.И., Корнейчук В.И., Тарасенко В.П. Некоторые машинные методы вычисления рациональных функций многих аргументов // Автоматика и телемеханика. – 1977. – № 12. – С. 145-154.
2. Жабин В.И., Корнейчук В.И., Тарасенко В.П. Методы быстрого неавтономного воспроизведения функций // Управляющие системы и машины. – 1977. – № 3. – С. 96-101.
3. Карцев М.А., Брик В.А. Вычислительные системы и синхронная арифметика. – М.: Радио и связь. – 1981. – 360 с.
4. Построение быстродействующих специализированных вычислителей для реализации многоместных выражений // Автоматика и вычислительная техника. – 1981. – № 6. – С. 18-22.

І.А. Дичка, В.В. Жабіна

Суміщення залежних операцій на рівні обробки розрядів операндів

На прикладі операції множення розглядається можливість виконання послідовності залежних за даними операцій у режимі суміщення на рівні обробки розрядів машинних слів. Досліджено метод множення чисел у неавтономному режимі з використанням зміщеної надлишкової системи числення, визначений вплив на час обчислень величини основи системи числення й довжини послідовності залежних операцій.

I.A. Dychka, V.V. Zhabina

Dependent Operations Overlapping at the Level of Operand Place Processing

Multiplication is considered as an example of the opportunity to carry out a sequence of operations depended on the data in overlapping mode at the level of processing of machine word places. The method of multiplication of numbers in the on-line mode using shifted redundant number notation is investigated, the influence of number notation basis size calculations and length of dependent operations sequence on time is determined.

Статья поступила в редакцию 10.07.2008.